

Bac Maroc 2023 Sc-Maths

Exercice 1 (7,5 points)

Partie I

1. a) Nous devons montrer que $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$.

$$\begin{aligned} \bullet \forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{4}{(2+t)^2} - \frac{1}{1+t} &= \frac{4(1+t) - (2+t)^2}{(2+t)^2(1+t)} \\ &= \frac{4 + 4t - 4 - 4t - t^2}{(2+t)^2(1+t)} \\ &= \frac{-t^2}{(2+t)^2(1+t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall t \in [0 ; +\infty[, \begin{cases} -t^2 \leq 0 \\ (2+t)^2 > 0 \\ 1+t > 0 \end{cases} &\Rightarrow \frac{-t^2}{(2+t)^2(1+t)} \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{4}{(2+t)^2} - \frac{1}{1+t} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+t)^2} \\ &= \frac{2(1+t) - (1+t)^2 - 1}{2(1+t)^2} \\ &= \frac{2 + 2t - 1 - 2t - t^2 - 1}{2(1+t)^2} \\ &= \frac{-t^2}{2(1+t)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall t \in [0 ; +\infty[, \begin{cases} -t^2 \leq 0 \\ 2(1+t)^2 > 0 \end{cases} &\Rightarrow \frac{-t^2}{2(1+t)^2} \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)}$$

$$\text{Par conséquent, nous avons montré que : } \boxed{\forall t \in [0 ; +\infty[, \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)}.$$

1. b) Soit un nombre réel $x \geq 0$.

D'après la question précédente, nous savons que $\forall t \in [0 ; x]$, $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$.

Dès lors,

$$\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & 4 \left[\frac{-1}{2+t} \right]_0^x \leq \left[\ln(1+t) \right]_0^x \leq \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{1+t} \right]_0^x \\
\Rightarrow & 4 \left(\frac{-1}{2+x} - \frac{-1}{2+0} \right) \leq \ln(1+x) - \ln(1+0) \leq \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{1}{1+x} \right) - \left(0 - \frac{1}{1+0} \right) \right] \\
\Rightarrow & 4 \left(\frac{-1}{2+x} + \frac{1}{2} \right) \leq \ln(1+x) - 0 \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{1+x} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & 4 \left(\frac{-2+2+x}{2(2+x)} \right) \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+x^2-1+1+x}{1+x} \right) \\
\Rightarrow & 4 \left(\frac{x}{2(2+x)} \right) \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right) \\
\Rightarrow & \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons montré que : $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Nous devons montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{-1}{2}$.

Par la question précédente, nous savons que : $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x(x+2)}{1+x} \right)$

Dès lors, en divisant les trois membres des inégalités par $x (\neq 0)$, nous obtenons que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{1+x} \right) & \Rightarrow \frac{2}{2+x} \leq g(x) \leq \frac{x+2}{2(1+x)} \\
& \Rightarrow \frac{2}{2+x} - 1 \leq g(x) - 1 \leq \frac{x+2}{2(1+x)} - 1 \\
& \Rightarrow \frac{2-2-x}{2+x} \leq g(x) - 1 \leq \frac{x+2-2-2x}{2(1+x)} \\
& \Rightarrow \frac{-x}{2+x} \leq g(x) - 1 \leq \frac{-x}{2(1+x)} \\
& \Rightarrow \frac{-1}{2+x} \leq \frac{g(x) - 1}{x} \leq \frac{-1}{2(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Selon le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), nous en déduisons que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$.

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = g(x) e^{-x} \quad (\forall x \in]0; +\infty[) \end{cases}$$

1. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} \times e^{-x} \end{aligned}$$

Or $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} \text{ avec } X = 1+x \\ \quad = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{(X=-x) \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{array} \right.$

Nous en déduisons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 1 \times 0$, soit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

Graphiquement, ce résultat signifie que **la courbe [b]C** admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$. [b]

2. a) Montrons que la fonction f est continue à droite en 0.

D'une part, $f(0) = 1$.

D'autre part, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x}$.

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$

$$= h'(0) \text{ avec } h(x) = \ln(1+x)$$

$$= 1 \text{ car } h'(x) = \frac{1}{1+x} \implies h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

D'où $\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-x} = e^0 \implies \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-x} = 1}$

Dès lors, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x} = 1 \times 1 = 1$, soit $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

Par conséquent, **la fonction f est continue à droite en 0** car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$.

2. b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x} \right) &= \frac{(e^{-x} - 1)g(x) + g(x) - 1}{x} \\ &= \frac{e^{-x}g(x) - g(x) + g(x) - 1}{x} \\ &= \frac{e^{-x}g(x) - 1}{x} \\ &= \frac{f(x) - 1}{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{e^{-x} - 1}{x}\right) g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x}\right)}$$

2. c) Nous devons en déduire que f est dérivable à droite de 0 et déterminer $f'_d(0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \bullet \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x} - e^0}{x - 0} \right) \\ &= k'(0) \quad \text{avec } k(x) = e^{-x} \\ &= -1 \quad \text{car } k'(x) = -e^{-x} \Rightarrow k'(0) = -e^0 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -1}$$

$$\bullet \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (\text{voir Partie II - 2. a}) \Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 1}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{g(x) - 1}{x} \right) = -\frac{1}{2}} \quad (\text{voir Partie I - 2.})$$

$$\text{D'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (-1) \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}}$$

Par conséquent, **la fonction f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$.**

3. Montrons que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Par définition de f , nous savons que pour tout $x \in]0; +\infty[, f(x) = g(x)e^{-x}$.

La fonction g est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ avec $x \neq 0$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions dérivables.

Il s'ensuit que **la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.**

De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(1+x)}{x} e^{-x} \right)' \\ &= \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)' \times e^{-x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \times (e^{-x})' \\ &= \frac{(\ln(1+x))' \times x - \ln(1+x) \times x'}{x^2} \times e^{-x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \times (-e^{-x}) \\ &= \frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x) \times 1}{x^2} \times e^{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \times e^{-x} \\ &= \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \times e^{-x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \times e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \times e^{-x} \\
&= \left(\frac{\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \times e^{-x} \\
&= \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x} \right) \times e^{-x} \\
&= \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} - \frac{x(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \right) \times e^{-x} \\
&= \frac{x - (1+x)\ln(1+x) - x(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \times e^{-x} \\
&= \frac{x - (1+x)\ln(1+x)[1+x]}{x^2(1+x)} e^{-x} \\
&= \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x} \\
\Rightarrow & \boxed{\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}}
\end{aligned}$$

4. a) Nous avons montré dans la Partie I, question 1. b), que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x}{1+x} \right).$$

Dès lors, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
-(1+x)^2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 2x}{1+x} \right) &\leq -(1+x)^2 \times \ln(1+x) \leq -(1+x)^2 \times \frac{2x}{2+x} \\
-\frac{1}{2}(1+x)(x^2 + 2x) &\leq -(1+x)^2 \ln(1+x) \leq -(1+2x+x^2) \times \frac{2x}{2+x} \\
-\frac{1}{2}(x^2 + 2x + x^3 + 2x^2) &\leq -(1+x)^2 \ln(1+x) \leq -\frac{2x + 4x^2 + 2x^3}{2+x} \\
x - \frac{x^2 + 2x + x^3 + 2x^2}{2} &\leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq x - \frac{2x + 4x^2 + 2x^3}{2+x} \\
\frac{2x - x^2 - 2x - x^3 - 2x^2}{2} &\leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{2x + x^2 - 2x - 4x^2 - 2x^3}{2+x} \\
\frac{-x^3 - 3x^2}{2} &\leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{-2x^3 - 3x^2}{2+x} \\
\frac{-x^2(x+3)}{2} &\leq x - (1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{-x^2(2x+3)}{2+x} \\
\frac{-x^2(x+3)}{2x^2(1+x)} &\leq \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq \frac{-x^2(2x+3)}{x^2(1+x)(2+x)} \quad \text{car } x^2(1+x) > 0 \\
\frac{-(x+3)}{2(1+x)} &\leq \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq \frac{-(2x+3)}{(1+x)(2+x)} \quad (\text{inégalités (1)})
\end{aligned}$$

$$\text{Or } x > 0 \implies \frac{2x+3}{(1+x)(2+x)} > 0 \implies \boxed{\frac{-(2x+3)}{(1+x)(2+x)} < 0}$$

Montrons que pour tout $x > 0$, nous obtenons $-\frac{3}{2} < \frac{-(x+3)}{2(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} < \frac{-(x+3)}{2(1+x)} &\iff \frac{3}{2} > \frac{x+3}{2(1+x)} \\
&\iff 3 > \frac{x+3}{1+x}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow 3(1+x) > x+3$$

$$\Longleftrightarrow 3+3x > x+3$$

$$\Longleftrightarrow 2x > 0$$

$$\Longleftrightarrow x > 0$$

$$\text{D'où } x > 0 \Longleftrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{-(x+3)}{2(1+x)}$$

Dès lors, les "inégalités (1)" peuvent être complétées comme suit :

$$-\frac{3}{2} < \frac{-(x+3)}{2(1+x)} \leq \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \leq \frac{-(2x+3)}{(1+x)(2+x)} < 0$$

$$\text{Par conséquent, } \forall x \in]0; +\infty[, -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

4. b) Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; +\infty[, -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0 \\ \Rightarrow -\frac{3}{2} e^{-x} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x} < 0 \\ \Rightarrow -\frac{3}{2} e^{-x} < f'(x) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } x > 0 &\Rightarrow -x < 0 \\ &\Rightarrow e^{-x} < 1 \\ &\Rightarrow -\frac{3}{2} e^{-x} > -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

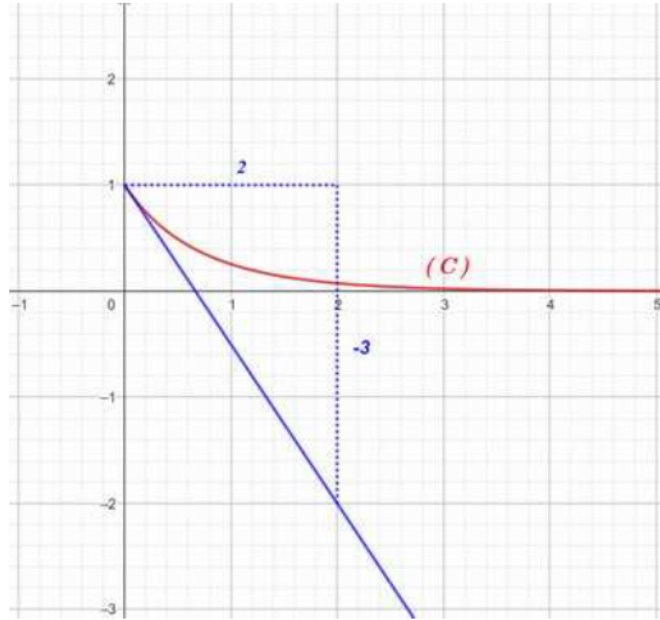
Nous obtenons alors, $\forall x \in]0; +\infty[, -\frac{3}{2} < -\frac{3}{2} e^{-x} < f'(x) < 0$,

$$\text{soit } \forall x \in]0; +\infty[, -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$$

5. a) En nous basant sur la question précédente, nous pouvons dresser le tableau de variations de f .

$f(0) = 1$		x	0		$+\infty$
$f_d(0) = -\frac{3}{2} < 0$		$f'(x)$	—	—	—
		$f(x)$	1	$\searrow$	0

5. b) Courbe C et la demi-tangente à droite au point de C de coordonnées $(0; 1)$ dont le coefficient directeur vaut $-\frac{3}{2}$.



Partie III

1. Montrons que l'équation $f(x) = 3x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Soit la fonction h définie dans $]0; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - 3x$.

Notons que $h(x) = f(x) - 3x \iff h(x) = f(x) + (-3x)$.

La fonction h est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions continues sur cet intervalle).

La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ (somme de deux fonctions strictement décroissantes sur cet intervalle).

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) - 3x] = 1 - 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = 0 - \infty = -\infty \end{cases} \implies \boxed{0 \in] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) [}$$

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = 3x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$, soit $\boxed{f(\alpha) = 3\alpha}$.

2. Soit $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \beta \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

2. a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $u_0 \geq 0$

C'est une évidence car $u_0 = \beta \in \mathbb{R}^+ \implies u_0 \geq 0$.

Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$.

En effet, nous savons par la question 5a - Partie II que $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$.

Or par hypothèse, $u_n \in]0; +\infty[$.

Il s'ensuit que $f(u_n) > 0$.

Par conséquent, $\boxed{u_{n+1} > 0}$.
L'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0}$.

2. b) Nous devons montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Nous avons montré dans la Partie II - question 4. b) que $\forall x \in]0; +\infty[, -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$ et par suite,
 $|f'(x)| < \frac{3}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0; +\infty[$, nous obtenons : $\forall x, y \in [0; +\infty[, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2}|x - y|$

Or $\alpha \in [0; +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; +\infty[$.

Dès lors, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{2}|u_n - \alpha|$.

Il s'ensuit que $|3u_{n+1} - 3\alpha| \leq \frac{3}{2}|u_n - \alpha|$, soit que $3|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{2}|u_n - \alpha|$

Par conséquent, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.

2. c) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}|\beta - \alpha|$.

C'est une évidence car $|u_0 - \alpha| = |\beta - \alpha| \implies \boxed{|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0}|\beta - \alpha|}$ car $\frac{1}{2^0} = 1$.

Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$.

En effet, nous savons par la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Or par hypothèse, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$.

Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$

Par conséquent, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|}$

L'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|}.$$

2. d) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Nous avons montré dans l'exercice précédent que $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha| = 0$

Donc $\begin{cases} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha| \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha| = 0 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$

Par conséquent, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$

Exercice 2 (2,25 points)

On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$.

1. a) Nous devons montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \exists c_k \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$.

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est continue sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[$.

D'après le théorème des accroissements finis, nous déduisons que :

$$\exists c_k \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[: f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f'(c_k) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$

$$\text{Or } \begin{cases} f\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\frac{k}{n}} \\ f\left(\frac{k+1}{n}\right) = e^{\frac{k+1}{n}} \\ f'(x) = (e^x)' = e^x \implies f'(c_k) = e^{c_k} \\ \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{k+1-k}{n} = \frac{1}{n} \end{cases}$$

Par conséquent, $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}, \exists c_k \in \left]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[$ tel que $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$.

1. b) Nous devons montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_k \left(\frac{k}{n} ; e^{\frac{k}{n}} \right) \\ M_{k+1} \left(\frac{k+1}{n} ; e^{\frac{k+1}{n}} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} M_k M_{k+1} &= \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{n} e^{c_k} \right)^2} \quad (\text{voir 1. a}) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right)^2 \left[1 + (e^{c_k})^2 \right]} \\ &= \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$

1. c) Nous avons montré que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$

$$\begin{aligned} \text{Or } c_k \in \left] \frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n} \right[&\Rightarrow c_k \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n} \right] \\ &\Rightarrow \frac{k}{n} \leq c_k \leq \frac{k+1}{n} \\ &\Rightarrow \frac{2k}{n} \leq 2c_k \leq \frac{2(k+1)}{n} \\ &\Rightarrow e^{\frac{2k}{n}} \leq e^{2c_k} \leq e^{\frac{2(k+1)}{n}} \\ &\Rightarrow 1 + e^{\frac{2k}{n}} \leq 1 + e^{2c_k} \leq 1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}} \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sqrt{1 + e^{2c_k}} \leq \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}}$$

2. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons montré que $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} &\leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} &\leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} \end{aligned}$$

Changeons les indices dans l'écriture $\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$.

Soit $i = k + 1$,

$$\begin{cases} \text{si } k = 0, \text{ alors } i = 0 + 1 = 1 \\ \text{si } k = n - 1, \text{ alors } i = (n - 1) + 1 = n \end{cases}$$

Dans ce cas, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2i}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}.$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

2. b) Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$.

La fonction f est continue sur $[0; 1]$.

Rappelons le corollaire du théorème sur les sommes de Riemann.

Soit $[i]f$ une fonction continue sur $[a; b]$ ($a < b$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $s_{1,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ **et** $S_{2,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$

Alors les suites $(s_{1,n})$ et $(S_{2,n})$ convergent et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{1,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2,n} = \int_a^b f(x) \, dx$ **.[/i]**

Appliquons ce corollaire lorsque $a = 0$ et $b = 1$.

Nous obtenons : $f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = f\left(0 + \frac{k(1-0)}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

De plus,

$$s_{1,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \implies s_{1,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$$

$$\text{et } S_{2,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \implies S_{2,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{1,n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2,n} \\ \implies & \int_0^1 f(x) \, dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \int_0^1 f(x) \, dx \\ \implies & \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$.

Exercice 3 (3,5 points)

On considère le nombre complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$.

1. a) Nous devons écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$

- Écrivons d'abord $z_1 = 1 - i$ sous forme trigonométrique, soit sous la forme $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$.

Nous savons que $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Nous obtenons ainsi :

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \implies z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta_1 = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Nous en déduisons que la forme trigonométrique de z_1 est : $z_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$

Par conséquent, **la forme exponentielle de $1 - i$ est :** $\boxed{1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

- Écrivons $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique, soit sous la forme $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

Nous savons que $|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$.

Nous obtenons ainsi :

$$z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies \theta_2 = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Nous en déduisons que la forme trigonométrique de z_2 est : $z_2 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]$

Par conséquent, **la forme exponentielle de $1 + \sqrt{3}i$ est :** $\boxed{1 + \sqrt{3}i = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

1. b) Nous devons montrer que : $\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

$$\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$$

$$= e^{i(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12})}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\implies \boxed{\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

1. c) A l'aide de la question précédente, nous obtenons :

$$\frac{(1 - i)(1 + \sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}} \iff \frac{1 + \sqrt{3}i - i + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\iff \frac{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\iff \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

Par identification, nous en déduisons que :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} = 2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$$

1. d) A l'aide de la question précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u &= 1 + (2-\sqrt{3})i = 1 + i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ &= 1 + \frac{i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3-1} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

2. On considère les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2-\sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

2. a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n + iy_n = u^n$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $x_0 + iy_0 = u^0$.

$$\text{C'est une évidence car } \begin{cases} x_0 + iy_0 = 1 + i \times 0 \\ u^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + iy_0 = 1 \\ u^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_0 + iy_0 = u^0}$$

Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $x_n + iy_n = u^n$, alors $x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}$

En effet,

$$\begin{aligned} x_{n+1} + iy_{n+1} &= x_n - (2-\sqrt{3})y_n + i\left((2-\sqrt{3})x_n + y_n\right) \\ &= x_n - (2-\sqrt{3})y_n + i(2-\sqrt{3})x_n + iy_n \\ &= x_n + iy_n + i(2-\sqrt{3})x_n - (2-\sqrt{3})y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_n + iy_n + i(2 - \sqrt{3}) \left(x_n - \frac{1}{i} y_n \right) \\
&= x_n + iy_n + i(2 - \sqrt{3})(x_n + iy_n) \\
&= (x_n + iy_n) (1 + i(2 - \sqrt{3})) \\
&= u^n \times u \\
&= u^{n+1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}}$
L'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; x_n + iy_n = u^n}$.

2. b) Nous en déduisons que pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
x_n + iy_n &= u^n \\
&= [(\sqrt{6} - \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}]^n \quad (\text{voir question 1. d}) \\
&= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{12}} \\
&= (\sqrt{6} - \sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} \right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) \right) \\
&\quad \text{car } \sqrt{6} - \sqrt{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} \quad (\text{voir question 1. d})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n + iy_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n} + i \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}}$$

Par identification, nous en déduisons que :

$$\begin{cases} x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n} \\ y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n} \end{cases}$$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe $z_{A_n} = u^n$.

3. a) Nous devons déterminer les entiers n pour lesquels les points O , A_0 et A_n sont alignés.

Les points O , A_0 et A_n sont alignés $\iff \frac{z_{A_n} - z_O}{z_{A_0} - z_O} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } \frac{z_{A_n} - z_O}{z_{A_0} - z_O} \in \mathbb{R} &\iff \frac{u^n - 0}{u^0 - 0} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{u^n}{1} \in \mathbb{R} \\
&\iff u^n \in \mathbb{R} \\
&\iff x_n + iy_n \in \mathbb{R} \\
&\iff y_n = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{n\pi}{12} = k\pi \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{n}{12} = k \\
&\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 12k
\end{aligned}$$

Puisque n est un nombre entier naturel, nous avons : $n = 12k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, les points O , A_0 et A_n sont alignés si et seulement si n est multiple de 12.

3. b) Nous devons montrer que pour tout entier n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

Montrons d'abord que les trois points O , A_n et A_{n+1} sont distincts deux à deux.

Nous savons que les affixes des points O , A_n et A_{n+1} sont respectivement 0 , u^n et u^{n+1} .

$$\begin{aligned}
&\bullet \quad u \neq 0 \implies u^n \neq 0 \\
&\quad \implies \boxed{A_n \neq O} \\
&\bullet \quad u \neq 0 \implies u^{n+1} \neq 0 \\
&\quad \implies \boxed{A_{n+1} \neq O} \\
&\bullet \quad \begin{cases} u^{n+1} = u \times u^n \\ u \neq 1 \end{cases} \implies u^{n+1} \neq u^n \\
&\quad \implies \boxed{A_n \neq A_{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc les trois points O , A_n et A_{n+1} forment un triangle.

Montrons ensuite que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

$$\text{Le triangle } OA_nA_{n+1} \text{ est rectangle en } A_n \iff \frac{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}}{z_0 - z_{A_n}} \in i\mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } \frac{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}}{z_0 - z_{A_n}} &= \frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} \\
&= \frac{u^{n+1} - u^n}{-u^n} \\
&= \frac{u^n(u - 1)}{-u^n} \\
&= \frac{u - 1}{-1} \\
&= 1 - u \\
&= 1 - \left(1 + (2 - \sqrt{3})i\right) \\
&= -(2 - \sqrt{3})i
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\frac{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}}{z_0 - z_{A_n}} \in i\mathbb{R}}$$

Par conséquent, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .

Exercice 4 (3 points)

Soit p un nombre premier impair.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^2 \equiv 2 [p]$.

1. a) Montrons que $2^{p-1} \equiv 1 [p]$.

Puisque p est un nombre premier impair, nous déduisons que $p \wedge 2 = 1$.

En appliquant le petit théorème de Fermat, nous savons que si p est un nombre premier et si $p \wedge 2 = 1$,

alors $2^{p-1} \equiv 1 [p]$.

1. b) Remarques : $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = \left(2^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2 \implies \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = 2^{p-1} - 1$

et p étant un nombre premier impair donc positif, $(p-1)$ est un nombre pair positif, ce qui implique que

$$\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} 2^{p-1} \equiv 1 [p] &\iff 2^{p-1} - 1 \equiv 0 [p] \\ &\iff \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 [p] \\ &\iff p \mid \left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \\ &\iff p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \quad \text{ou} \quad p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \quad \text{car } p \text{ est premier} \\ &\iff 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 [p] \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 [p] \\ &\iff 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \quad \text{ou} \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p] \end{aligned}$$

2. Soit x une solution de l'équation (E) .

2. a) Montrons que p et x sont premiers entre eux.

Nous allons utiliser une propriété des nombres premiers : *si un nombre premier ne divise pas un entier, il est premier avec lui.*

Montrons alors que le nombre premier p ne divise pas x .

Par l'absurde, supposons que p divise x .

$$p \mid x \implies p \mid x^2$$

Puisque x une solution de l'équation (E) , nous savons que $x^2 \equiv 2 [p]$, soit que $x^2 - 2 \equiv 0 [p]$.

Donc $p \mid x^2 - 2$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \mid x^2 \\ p \mid x^2 - 2 \end{cases} &\implies p \mid [x^2 - (x^2 - 2)] \\ &\implies p \mid (x^2 - x^2 + 2) \\ &\implies p \mid 2 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car p est un nombre premier impair et est donc supérieur ou égal à 3.

D'où la supposition " p divise x " est absurde.

Par conséquent, le nombre premier ne divise pas x .

En utilisant la propriété des nombres premiers rappelée ci-dessus, nous en déduisons que p et x sont premiers entre eux, soit $p \wedge x = 1$..

2. b) Montrons que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

D'une part, nous savons que p est premier et que $p \wedge x = 1$.

D'après le petit théorème de Fermat, nous déduisons que $x^{p-1} \equiv 1 [p]$.

D'autre part, x est une solution de l'équation (E) , soit $x^2 \equiv 2 [p]$.

Nous avons montré dans les remarques que $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 2 [p] &\implies (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} [p] \\ &\implies x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} [p]. \end{aligned}$$

Par la transitivité de la congruence modulo p , nous obtenons :

$$\begin{cases} x^{p-1} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} [p] \\ x^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} [p] \\ x^{p-1} \equiv 1 [p] \end{cases} \implies 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p].$$

3. Montrons que $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}, p \mid C_p^k$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}, C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} &\iff C_p^k = \frac{p(p-1)!}{k(k-1)!(p-k)!} \\ &\iff k C_p^k = p \times \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} \\ &\iff k C_p^k = p C_{p-1}^{k-1} \\ &\implies p \mid k C_p^k \end{aligned}$$

Or p ne divise pas k car $(k \in \{1, 2, \dots, p-1\} \implies k < p-1 < p \implies k < p)$.

D'où, en utilisant la propriété des nombres premiers rappelée dans la question 2. a), nous en déduisons que $p \wedge k = 1$.

En résumé, nous savons que p divise le produit $k C_p^k$ et que p est premier avec k .

Donc, par le théorème de Gauss, p divise C_p^k .

4. a) Montrons que : $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies (1+i)^p &= \left[\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \right]^p \\ &= (\sqrt{2})^p \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^p \\ &= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^p \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^p \\ &= 2^{\frac{p}{2}} \left(\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad (\text{en utilisant la formule de Moivre}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$.

4. b) On admet que $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$.

Nous devons montrer que $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et que $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$.

Nous savons que :
$$\begin{cases} (1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right) & \text{(voir 4.a)} \\ (1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1} \end{cases}$$

En identifiant les parties réelles, nous obtenons : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}$.

Or $\begin{cases} (-1)^k \in \mathbb{Z} \\ C_p^{2k} \in \mathbb{N} \end{cases} \implies (-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$

D'où $\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$.

Nous en déduisons que $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$

De plus, nous avons montré dans la question 3. que $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}, p \mid C_p^k$.

Autrement dit, $\forall k \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}, p \mid C_p^{2k}$, soit $C_p^{2k} \equiv 0 [p]$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}, C_p^{2k} \equiv 0 [p] &\implies (-1)^k C_p^{2k} \equiv 0 [p] \\ &\implies \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \equiv 0 [p] \\ &\implies (-1)^0 C_p^0 + \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \equiv (-1)^0 C_p^0 [p] \\ &\implies \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \equiv 1 [p] \end{aligned}$$

Puisque $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}$, nous en déduisons que $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$.

5. Nous devons en déduire que si $p \equiv 5 [8]$, alors l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

$$p \equiv 5 [8] \iff \exists k \in \mathbb{Z} : p = 5 + 8k.$$

Supposons par l'absurde que x est une solution de l'équation (E).

Dans ce cas, nous avons montré à la question 4. b) que $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$.

Dès lors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p] &\iff 2^{\frac{p}{2}} \cos\left((5+8k)\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p] \\ &\iff 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\right) \equiv 1 [p] \\ &\iff 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \equiv 1 [p] \\ &\iff 2^{\frac{p}{2}} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \equiv 1 [p] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \times \left(-\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2}\right) \equiv 1 [p] \\
&\Longleftrightarrow 2^{\frac{p}{2}} \times (-2^{-\frac{1}{2}}) \equiv 1 [p] \\
&\Longleftrightarrow -2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \\
&\Longleftrightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]
\end{aligned}$$

Or nous avons montré dans la question 2. b) que $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.
 Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p] \\ 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \end{cases} &\implies 1 \equiv -1 [p] \\
&\implies 2 \equiv 0 [p] \\
&\implies p \mid 2
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer que si x est une solution de l'équation (E), alors p divise 2, **ce qui est impossible**, car p étant un nombre premier impair, il est strictement supérieur à 2.

Par conséquent, si $p \equiv 5 [8]$, alors l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5 (3,5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité

la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Partie I

1. Montrons que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Nous savons que $(M_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe car $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Pour montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$, il suffit de montrer que la partie E de $M_2(\mathbb{R})$ comprend l'élément neutre du groupe $(M_2(\mathbb{R}), +)$ et que $\forall M, M' \in E : M - M' \in E$.

- Soit $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \in E$ avec $x = y = 0$.

$$\begin{aligned}
M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0+0 & 0 \\ 2 \times 0 & 0-0 \end{pmatrix} \in E &\implies M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E \\
&\implies \boxed{O \in E}
\end{aligned}$$

- Soit $M(x, y) \in E$ et $M'(x', y') \in E$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } M(x, y) - M'(x', y') &= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x-x') + (y-y') & (y-y') \\ 2(y-y') & (x-x') - (y-y') \end{pmatrix} \\
&= M(x-x', y-y') \in E
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall M(x, y) \in E, M'(x', y') \in E : M(x, y) - M'(x', y') \in E}$$

Par conséquent, E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

En effet,

- $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- $O = M(0, 0) \in E \implies E \neq \emptyset$
- $\forall M(x, y), M'(x', y') \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha M(x, y) + \beta M'(x', y') &= \alpha \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(x+y) & \alpha y \\ 2\alpha y & \alpha(x-y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta(x'+y') & \beta y' \\ 2\beta y' & \beta(x'-y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y & \alpha y \\ 2\alpha y & \alpha x - \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x' + \beta y' & \beta y' \\ 2\beta y' & \beta x' - \beta y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y + \beta x' + \beta y' & \alpha y + \beta y' \\ 2\alpha y + 2\beta y' & \alpha x - \alpha y + \beta x' - \beta y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') & \alpha y + \beta y' \\ 2(\alpha y + \beta y') & (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in E \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall M(x, y), M'(x', y') \in E \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha M(x, y) + \beta M'(x', y') \in E}$$

Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

3. a) $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M'(x', y') &= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') + 2yy' & (x+y)y' + y(x'-y') \\ 2y(x'+y') + (x-y)2y' & 2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' + yy' + 2yy' & xy' + yy' + yx' - yy' \\ 2yx' + 2yy' + 2xy' - 2yy' & 2yy' + xx' - xy' - yx' + yy' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' + 3yy' & xy' + yx' \\ 2yx' + 2xy' & xx' + 3yy' - xy' - yx' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xx' + 3yy') + (xy' + yx') & xy' + yx' \\ 2(xy' + yx') & (xx' + 3yy') - (xy' + yx') \end{pmatrix} \\ &= M(xx' + 3yy', xy' + yx') \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 : M(x, y) \times M'(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')}$$

3. b) Nous devons montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

- Montrons que $(E, +, \times)$ est un sous-anneau de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$.
 - $E \subset M_2(\mathbb{R})$.
 - $I \in E$ car $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 0) \in E$.
 - $\forall M(x, y) \in E, M'(x', y') \in E : M(x, y) - M'(x', y') \in E$ car $(E, +)$ est un groupe (voir question 1).
 - $\forall M(x, y) \in E, M'(x', y') \in E : M(x, y) \times M'(x', y') \in E$ car cette propriété a été démontrée dans $\mathbb{R}^4$ (voir question 3. a).

D'où $(E, +, \times)$ est un sous-anneau de $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

Par conséquent, $(E, +, \times)$ **est un anneau**

- Montrons que la loi $\times$ est commutative dans E .

En effet,

$$\forall M(x, y) \in E, M(x', y') \in E :$$

$$\begin{aligned} M(x, y) \times M(x', y') &= M(xx' + 3yy', xy' + yx') \\ &= M(x'x + 3y'y, x'y + y'x) \\ &= M(x', y') \times M(x, y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall M(x, y) \in E, M(x', y') \in E : M(x, y) \times M(x', y') = M(x', y') \times M(x, y)}$$

Par conséquent, $(E, +, \times)$ **est un anneau commutatif**.

- Puisque $I \in E$, nous en déduisons que $(E, +, \times)$ **est un anneau commutatif et unitaire**.

4. a) En utilisant la question 3. a), nous obtenons :

$$\begin{aligned} M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) &= M\left(\sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 3 \times 1 \times 1, \sqrt{3} \times 1 + 1 \times (-\sqrt{3})\right) \\ &= M\left(-3 + 3, \sqrt{3} - \sqrt{3}\right) \\ &= M(0, 0) = O \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O}$$

4. b) Nous avons montré que $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$.

Or $M(\sqrt{3}, 1) \neq O$ et $M(-\sqrt{3}, 1) \neq O$

Il s'ensuit que l'anneau $(E, +, \times)$ **n'est pas intègre** car $M(\sqrt{3}, 1)$ et $M(-\sqrt{3}, 1)$ sont des diviseurs de zéro.

Par conséquent, étant donné qu'un corps est un anneau intègre, nous en déduisons que $(E, +, \times)$ **n'est pas un corps**.

Partie II

Soient $F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $G = \left\{M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\right\}$.

1. Nous devons montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x + y\sqrt{3} = 0 \iff (x = 0 \text{ et } y = 0)$

- Montrons que $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x + y\sqrt{3} = 0 \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$

En effet, $x + y\sqrt{3} = 0 \implies x = -y\sqrt{3}$.

Supposons que : $y \neq 0$

Dans ce cas, nous obtenons : $\frac{x}{y} = -\sqrt{3}$, ce qui est impossible puisque $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ et $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Donc $\boxed{y = 0}$.

De plus, $\begin{cases} x = -y\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \implies \boxed{x = 0}$.

D'où, $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x + y\sqrt{3} = 0 \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

- Montrons que $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 : (x = 0 \text{ et } y = 0) \implies x + y\sqrt{3} = 0$
C'est évident car $(x = 0 \text{ et } y = 0) \implies x + y\sqrt{3} = 0 + 0 \times \sqrt{3} = 0$.

- Par conséquent, $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x + y\sqrt{3} = 0 \iff (x = 0 \text{ et } y = 0)}$

2. Nous devons montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

Nous savons que $F - \{0\} \subset \mathbb{R}^*$.

Pour montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, il suffit de montrer que $1 \in F - \{0\}$ et que

$$\forall x + y\sqrt{3}, x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\}, \quad (x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})^{-1} \in F - \{0\}.$$

- $1 \in F - \{0\}$ car $\begin{cases} 1 = 1 + 0 \times \sqrt{3} \\ 1 \neq 0 \end{cases}$ où $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$

- $\forall x + y\sqrt{3} \in F - \{0\}, \forall x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\},$

$$\begin{aligned} (x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})^{-1} &= \frac{x + y\sqrt{3}}{x' + y'\sqrt{3}} \\ &= \frac{(x + y\sqrt{3})(x' - y'\sqrt{3})}{(x' + y'\sqrt{3})(x' - y'\sqrt{3})} \\ &= \frac{xx' - 3yy' + yx'\sqrt{3} - xy'\sqrt{3}}{x'^2 - 3y'^2} \\ &= \frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 - 3y'^2}\sqrt{3} \quad \text{où } \left(\frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2}, \frac{yx' - xy'}{x'^2 - 3y'^2} \right) \in \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{(x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})^{-1} \in F}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y\sqrt{3} \in F - \{0\} \\ x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\} \end{cases} &\implies \begin{cases} x + y\sqrt{3} \neq 0 \\ x' + y'\sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x + y\sqrt{3} \neq 0 \\ (x' + y'\sqrt{3})^{-1} \neq 0 \end{cases} \\ &\implies \boxed{(x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})^{-1} \neq 0} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall x + y\sqrt{3}, x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\}, \quad (x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})^{-1} \in F - \{0\}.$$

Par conséquent, $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

3. Soit φ l'application définie de $F - \{0\}$ vers E par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$.

3. a) Vérifions que $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(F - \{0\}) &= \varphi(\{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}\}) \\ &= \{\varphi(x + y\sqrt{3}) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}\} \\ &= \{\varphi(x + y\sqrt{3}) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\} - \{\varphi(0 + 0\sqrt{3})\} \\ &= \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\} - \{M(0, 0)\} \\ &= G - \{O\} \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}}$$

3. b) Nous devons montrer que φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$.

$$\forall x + y\sqrt{3}, x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\},$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left((x+y\sqrt{3}) \times (x'+y'\sqrt{3})\right) &= \varphi\left((xx' + 3yy' + (xy' + yx')\sqrt{3})\right) \\
&= M(xx' + 3yy', xy' + yx') \\
&= M(x, y) \times M(x', y') \quad (\text{voir question Partie I - 3. a}) \\
&= \varphi(x + y\sqrt{3}) \times \varphi(x' + y'\sqrt{3})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\forall x + y\sqrt{3}, x' + y'\sqrt{3} \in F - \{0\}, \\ &\varphi((x + y\sqrt{3}) \times (x' + y'\sqrt{3})) = \varphi(x + y\sqrt{3}) \times \varphi(x' + y'\sqrt{3}) \end{aligned}}$$

Par conséquent, φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$.

3. c) Montrons que $(G - \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.

Nous avons montré dans la question 2 que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

Donc $F - \{0\}$ est un groupe commutatif car $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Or l'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif.

Il s'ensuit que $\varphi(F - \{0\})$ est un groupe commutatif.

Puisque $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$, nous déduisons que $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif.

4. Nous devons montrer que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.

→ Montrons que $(G, +)$ est un groupe commutatif.

Pour ce faire, montrons que G est un sous-groupe commutatif de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

•• G est une partie non vide de $M_2(\mathbb{R})$ car $O \in G$.

•• En vertu de la question 1 - Partie I, nous obtenons : $\forall M(x, y) \in G, M'(x', y') \in G : M(x, y) - M'(x', y') = M(x -$

Dès lors, G est un sous-groupe commutatif de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Par conséquent, $(G, +)$ est un groupe commutatif.

→ Nous savons que $(G - \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif (voir question 3. c).

→ La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans G car la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$.

Par conséquent, $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.