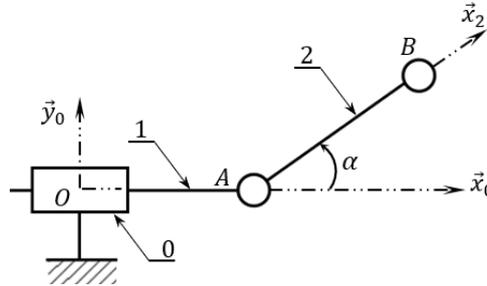


## A. Exercice noté 4 points sur 20:

### Répondre sur le Document réponse DR1

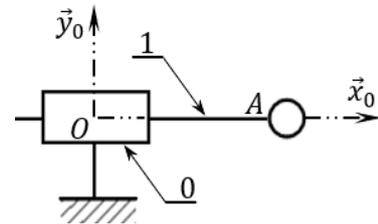
#### Robot deux axes :



**Figure E1**

Etude du mouvement de translation du solide 1 par rapport au bâti 0 :

- Le solide 1 est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  avec le bâti 0 de paramètre  $x(t)$  tel que :  
 $\vec{OA} = x(t) \cdot \vec{x}_0$  ;
- Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est associé au bâti 0 ;
- Le repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est associé au solide 1.



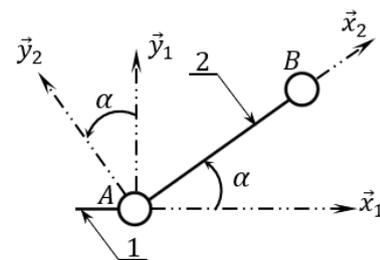
**Figure E2**

**Q1.** Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au bâti 0 :

$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A, 1/0)_A \end{Bmatrix}$$

Etude du mouvement de rotation du solide 2 par rapport à 1 :

- Le solide 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le solide 1 de paramètre  $\alpha(t)$  tel que :  
 $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ,  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  ;
- Le repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est associé au solide 2, avec  $\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_2$ .



**Figure E3**

**Q2.** Exprimer le vecteur position  $\vec{AB}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Q3.** Déterminer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1)$ .

**Q4.** Donner le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$ .

**Q5.** En déduire le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/1)$ .

Pour la suite revoir la **figure E1**

**Q6.** Exprimer le vecteur position  $\vec{OB}$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

**Q7.** Déterminer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/0)$ .

**Q8.** Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/0)$ .

**Fin de l'exercice.**

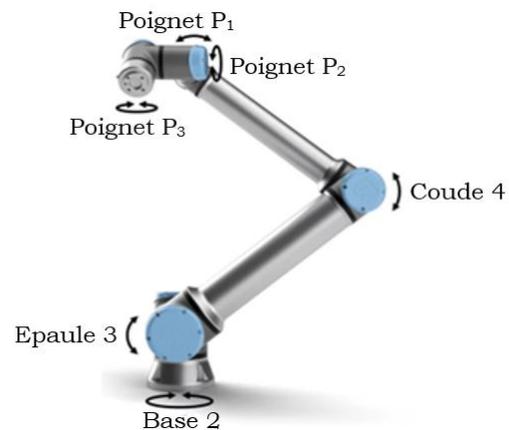
## Robot CAMP

La plateforme robot CAMP (**Figure 1**) est un manipulateur mobile développé par la société Robotnik. Elle est équipée d'un manipulateur Ur (**Figure 2**) pour lui offrir des capacités de manipulation. Le manipulateur est équipé d'une pince trois doigts et d'un capteur d'efforts sur la dernière liaison. La plateforme est aussi équipée d'un GPS, d'une centrale inertielle, de deux capteurs LIDAR à détection Laser mesurant la distance aux obstacles et de deux caméras.

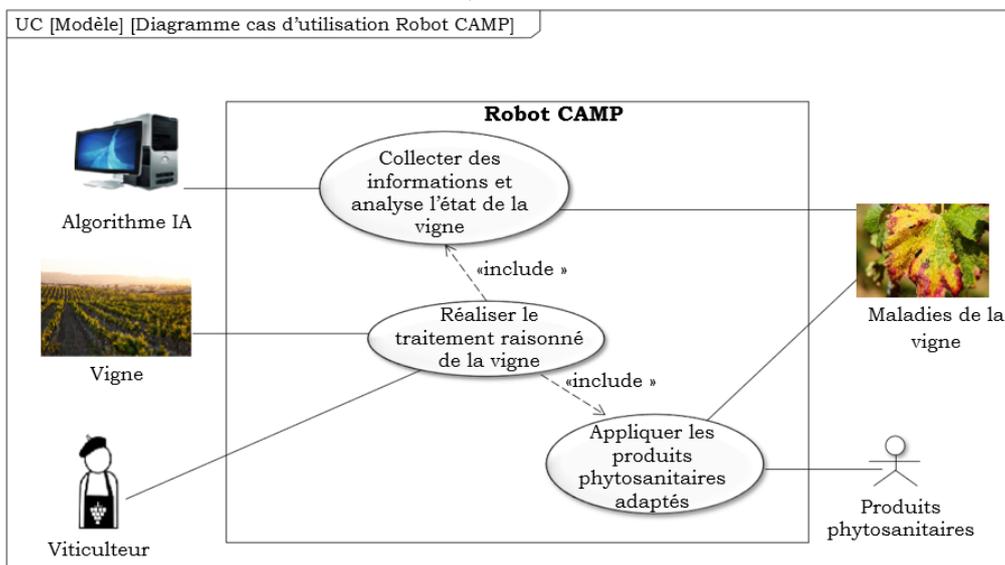
C'est une plateforme à quatre roues motrices, chacune entraînée par un moteur électrique de 1.2 kW, sans train directeur. Elle est autant adaptée aux environnements naturels qu'industriels, avec la possibilité de changer sa mobilité par l'installation de roues omni-directionnelles.



**Figure 1 :** Robot CAMP



**Figure 2 :** Manipulateur Ur



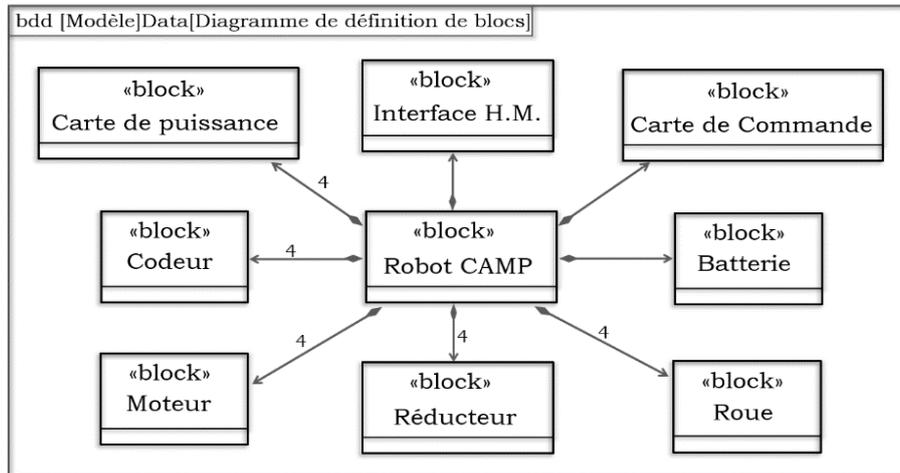
**Figure 3 :** Diagramme de cas d'utilisation

Le robot CAMP présente :

- Une alternative intéressante à l'utilisation des herbicides grâce au pouvoir de désherbage mécanique par le biais de son bras articulé.
- Une utilisation raisonnée des pesticides.
- Remplacement efficace de l'homme pendant le vendange.

L'ensemble des informations et données collectées par les différents capteurs implantés sur la plate forme sont communiquées via Wi-Fi, aux unités de traitement et de commande sur la base d'une analyse utilisant les algorithmes de l'intelligence artificielle (IA).

La structure du robot mobile est définie partiellement dans **la figure 4** par un diagramme de définition de blocs.



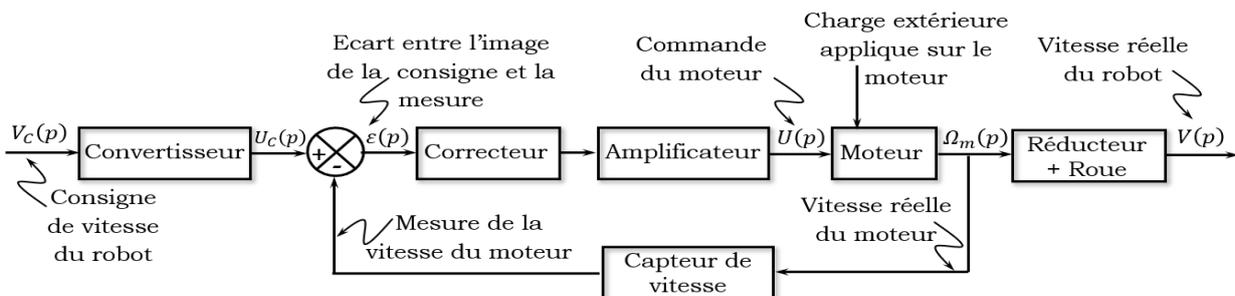
**Figure 4 :** Diagramme de définition de blocs partiel

**Q9.** A partir du diagramme de définition de blocs (**figure 4**), compléter, sur **le document réponse DR2**, la chaîne fonctionnelle du robot.

**B. Étude de l'asservissement en vitesse du robot CAMP :**

Chacune des roues dispose d'une motorisation indépendante avec un asservissement en vitesse. Le contrôle de la vitesse de rotation de chaque roue permet de minimiser le glissement longitudinal, notamment en mode automatique lorsque le robot fonctionne de manière autonome.

Pour une consigne de vitesse  $v_c(t)$  [m/s], la carte de commande génère une tension de consigne de rotation à appliquer à chaque moteur  $u_c(t)$  [V]. Un codeur permet d'avoir une tension mesurée  $u_m(t)$  [V], image de la vitesse de rotation du moteur  $\omega_m(t)$  [rad/s]. Un correcteur adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation  $u(t)$  [V] à appliquer aux moteurs.



**Figure 5 :** Schéma fonctionnel de l'asservissement en vitesse d'un des moteurs

Ce schéma fonctionnel est représenté par le schéma blocs de **la figure 6**, avec :

$R$ :	Résistance	$J_{eq}$ :	Moment d'inertie équivalent ramené sur l'axe moteur		
$L$ :	Inductance	$k$ :	Constante de force contre électromotrice et la constante de couple		
$K_{conv}$	Gain du convertisseur	$K_a$	Gain de l'amplificateur	$C(p)$ : Fonction de transfert du correcteur	
$K_{cap}$	Gain du capteur	$K_R$	Rapport cinématique		

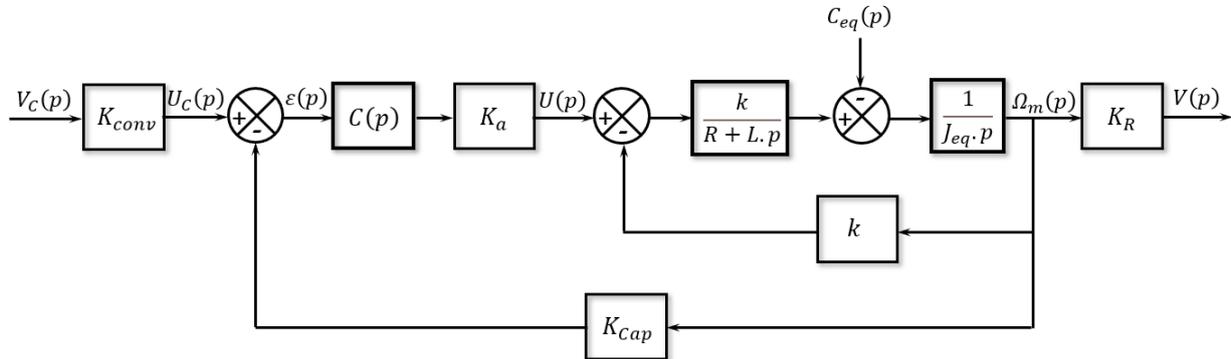


Figure 6 : Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse

Fonctions du transfert du moteur :

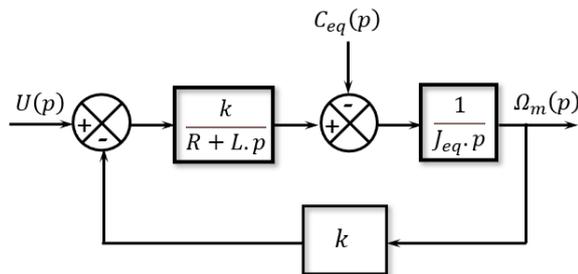


Figure 7 : Schéma blocs du moteur

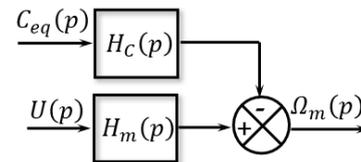


Figure 8 : Schéma équivalent du moteur

On a donc :

$$\Omega_m(p) = H_m(p) \cdot U(p) - H_c(p) \cdot C_{eq}(p)$$

Les deux fonctions de transfert du moteur  $H_m(p)$  et  $H_c(p)$ , sous leurs formes canoniques, sont notées :

$$H_m(p) = \frac{K_m}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad H_c(p) = \frac{K_c \cdot (1 + \tau \cdot p)}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

**Q10.** Déterminer les expressions des gains statiques  $K_m$  et  $K_c$ , de la constante de temps  $\tau$ , du facteur d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction des données :  $k, R, L, J_{eq}$ .

**Q11.** Donner la relation entre  $K_{conv}$ ,  $K_{cap}$  et  $K_R$  permettant d'obtenir un asservissement de  $V(p)$  sur la consigne  $V_c(p)$ .

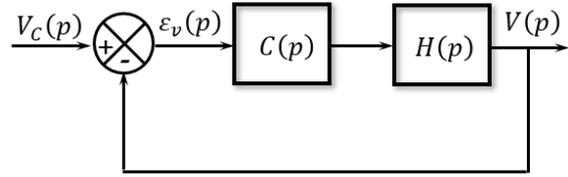
**Cahier des charges à respecter :**

Fonction	Performances et critères	Niveaux
○ Asservir en vitesse la plateforme par rapport au sol	<b>STABILITE</b>	○ $MG = 6 \text{ dB}$ mini ○ $M\phi = 45^\circ$ mini
	○ Marge de gain ○ Marge de phase	
	<b>PRECISION</b>	○ Nulle
	<b>RAPIDITE</b>	○ 0,5 secondes
	○ Temps de réponse à 5% (à une entrée en échelon de vitesse)	

On suppose dans cette partie que  $C_{eq}(p) = 0$ .

Le schéma bloc de l'asservissement, **figure 6**, peut être ramené à celui de la **figure 9** avec :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



**Figure 9** : Schéma bloc à retour unitaire

**Q12.** Donner l'expression de  $K$  en fonction de  $K_{cap}$ ,  $K_a$  et  $K_m$ .

**Correcteur proportionnel :  $C(p) = K_p$ .**

**Q13.** Donner la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$ . Préciser son gain  $K_{BO}$ , sa classe et son ordre. Sous quelle condition, on peut l'écrire sous la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  non corrigée ( $K_p = 1$ ) sont fournis sur **le document réponse DR3**.

**Q14.** Indiquer graphiquement sur le **document réponse DR3**, la marge de phase non corrigée notée  $M\phi_{nc}$  puis donner sa valeur. Quelle est la marge du gain non corrigée du système  $MG_{nc}$ ?

**Q15.** Déterminer la valeur de  $K_{pdB}$  permettant d'avoir une marge de phase de  $45^\circ$ . Indiquer graphiquement  $K_{pdB}$  sur **le document réponse DR3**.

**Q16.** Déterminer l'erreur statique  $\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon_v(t)$  pour un échelon unitaire de vitesse. Est-ce qu'il existe une valeur réaliste de  $K_p$  qui permet d'annuler l'erreur statique  $\epsilon_s$  ?

On cherche à avoir la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme d'un deuxième ordre fondamental.

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot \xi_{BF}}{\omega_{0BF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$$

**Q17.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$ . En déduire les expressions des paramètres canoniques  $K_{BF}$ ,  $\omega_{0BF}$  et  $\xi_{BF}$  en fonction de  $K_{BO}$ ,  $\xi$  et  $\omega_0$ .

**Q18.** Déterminer la valeur de  $K_p$  permettant d'avoir la réponse la plus rapide. Sachant que  $t_{r5\%} \cdot \omega_{0BF} = 3$ , déterminer la valeur du  $t_{r5\%}$ . Pour cela, il est conseillé, pour les valeurs numériques, d'exploiter les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  non corrigée ( $K_p = 1$ ) fournis sur **le document réponse DR3**.

Afin de respecter l'exigence de précision, un correcteur à action intégrale sera choisi.

**Correcteur PI de fonction de transfert :**  $C(p) = \frac{K_p}{p}$  .

**Q19.** Justifier, sans calcul, que ce correcteur ne permet pas d'avoir une fonction de transfert en boucle fermée sous la forme d'un deuxième ordre fondamental.

**Correcteur PI de fonction de transfert :**  $C(p) = K_i \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$  .

**Q20.** Rappeler l'effet de ce correcteur P.I sur la précision et la stabilité du système.

On choisit  $T_i$  de façon à compenser le "mode le plus lent".

La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée devient :

$$H_{BOC}(p) = \frac{20 \cdot K_i}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)}$$

**Q21.** Déterminer, analytiquement, la valeur  $K_i$  pour régler la marge de phase  $M\varphi_c = 45^\circ$ .

Cette valeur de  $K_i$  permet de satisfaire le critère de rapidité.

**Q22.** Conclure, sans calcul, quant à l'influence d'un couple perturbateur constant sur la stabilité et la précision du système.

### C. Etude dynamique du manipulateur :

**Objectif :** déterminer les équations de mouvement liant les couples transmis par les moteurs du bras manipulateur et les paramètres de mouvement.

Dans cette partie le manipulateur est considéré comme un robot trois axes, voir **figure 11**.

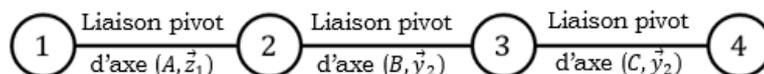
Il est composé de :	<input type="radio"/> Embase fixe 1.	<input type="radio"/> Base 2.	<input type="radio"/> Épaule 3.
<input type="radio"/> Coude 4.	<input type="radio"/> Poignet supposé fixe au point D par rapport au coude 4.		

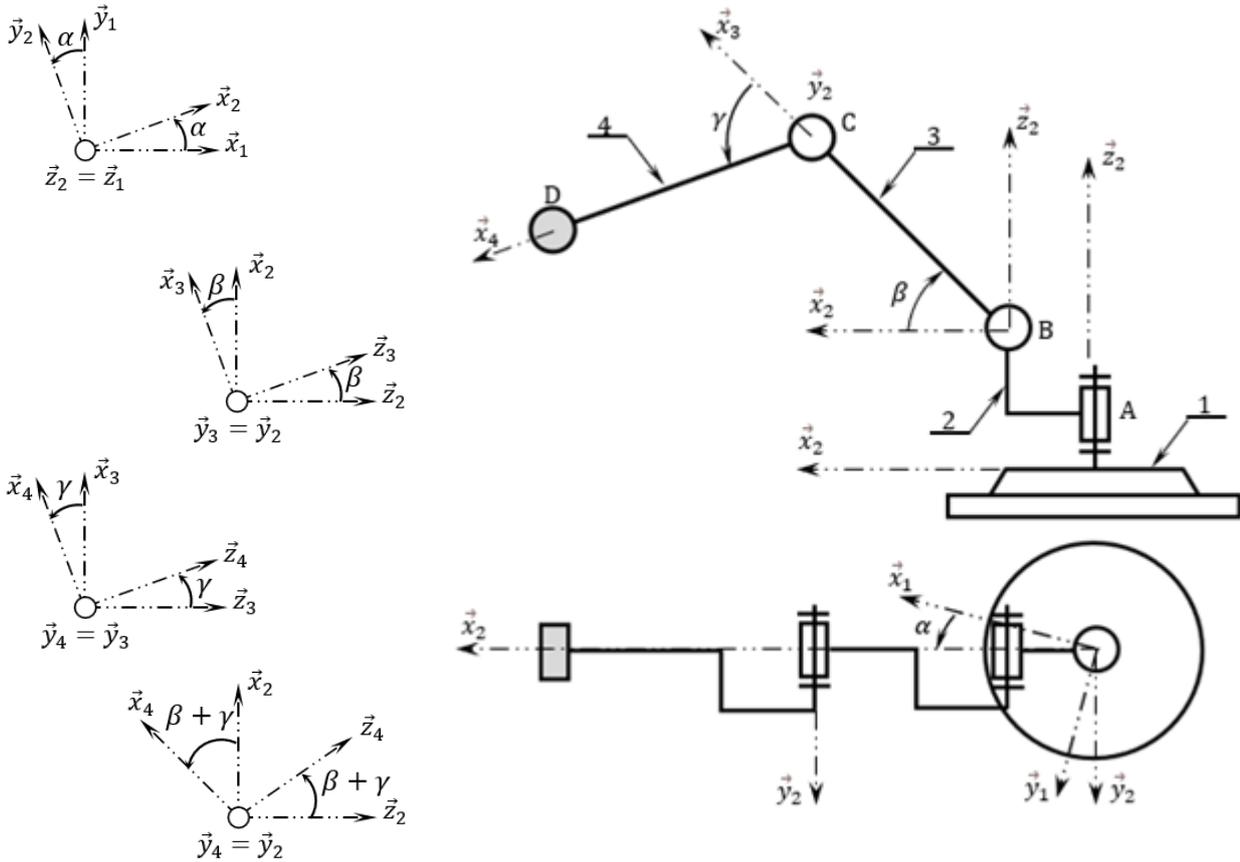
- ✓ La base 2 est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec l'embase fixe 1.
- ✓ L'épaule 3 est en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{y}_2)$  avec la base 2.
- ✓ Le coude 4 est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_2)$  avec l'épaule 3.
- ✓ Le repère galiléen  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est associé à l'embase fixe 1.
- ✓ Le repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est associé à la base 2,  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ .
- ✓ Le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est associé à l'épaule 3,  $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .
- ✓ Le repère  $R_4(C, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  est associé au coude 4,  $\gamma = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$ .

Données géométriques :

$$\overline{AB} = a_2 \cdot \vec{x}_2 + b_2 \cdot \vec{z}_2 ; \quad \overline{BC} = L \cdot \vec{x}_3 ; \quad \overline{CD} = L \cdot \vec{x}_4$$

Graphe de liaisons :





**Figure 11 :** Schéma cinématique du manipulateur

**Q23.** Expliciter la démarche permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement de 4 par rapport au repère  $R_1$ . Aucun calcul n'est demandé. Le choix du système isolé et du théorème appliqué est à justifier.

Pour la suite, on se limite dans l'étude dynamique à deux axes motorisés. On suppose donc que la liaison 4/3 est bloquée pour  $\gamma = 0$ . L'ensemble {épaule 3, coude 4, poignet} sera noté 34 voir **figure 12**.

L'ensemble 34 sera considéré comme une association :

- d'une tige T, de masse  $M_T$  et de centre d'inertie  $G_T$ , assimilée à un cylindre d'axe  $(B, \vec{x}_3)$ , de section négligeable et de longueur  $2L$ ;
- d'un poignet P, de masse  $M_p$ , assimilée à une masse ponctuelle en D.

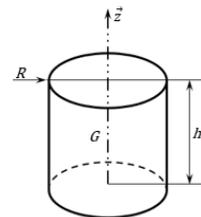
Le centre et la matrice d'inertie de l'ensemble 34 seront notés :

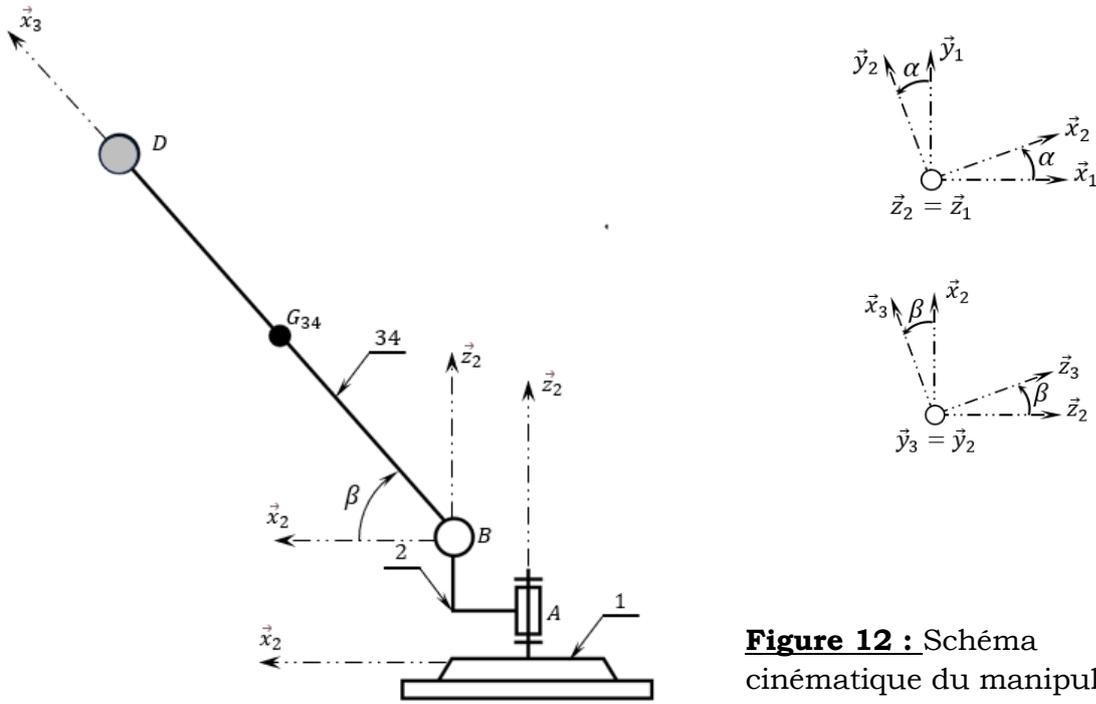
$$I(B, 34) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

$$\vec{BG}_{34} = L_{34} \cdot \vec{x}_3.$$

La matrice d'inertie d'un cylindre plein d'axe  $(G, \vec{z})$ , de masse  $m$ , de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  s'écrit :

$$I(G, \text{Cylindre}) = \begin{pmatrix} m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$





**Figure 12 :** Schéma cinématique du manipulateur pour  $\gamma = 0$

**Q24.** Sachant que  $\overline{BG}_{34} = L_{34} \cdot \vec{x}_3$ , déterminer  $L_{34}$  en fonction de  $M_T$ ,  $M_P$  et  $L$ .

**Q25.** Déterminer  $B_{34}$  et  $C_{34}$  en fonction de  $M_T$ ,  $M_P$  et  $L$ .

**Q26.** Déterminer le torseur cinématique de l'ensemble 34 dans son mouvement par rapport l'embase fixe 1, noté :  $\{V(34/1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(34/1) \\ \vec{V}(B, 34/1) \end{Bmatrix}_B$ .

**Q27.** Le torseur cinétique de l'ensemble 34 dans son mouvement par rapport l'embase fixe 1 est noté :  $\{C(34/1)\} = \begin{Bmatrix} \overline{R}_C(34/1) \\ \vec{\sigma}(B, 34/1) \end{Bmatrix}_B$ . Déterminer :

- a. la résultante cinétique  $\overline{R}_C(34/1)$ .
- b. le moment cinétique  $\vec{\sigma}(B, 34/1)$ .

On note  $J$  le moment d'inertie de la base 2 par rapport à l'axe  $(A, \vec{z}_2)$  et  $G_1$  son centre d'inertie situé sur l'axe  $(A, \vec{z}_2)$ .

**Q28.** Donner la projection du moment cinétique  $\vec{\sigma}(A, 2/1)$  sur  $\vec{z}_2$ .

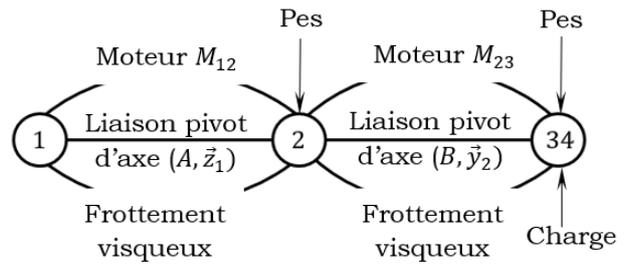
On modélise les actions mécaniques comme suit (voir **figure 13**):

- o Un moteur  $M_{12}$ , placé entre la base 2 et l'embase fixe 1, exerce un couple  $C_{m12} \cdot \vec{z}_2$ . Un frottement visqueux dans la liaison 2/1 est de coefficient  $f_{12}$ .
- o Un moteur  $M_{23}$ , placé entre l'épaule 3 et la base 2, exerce un couple  $C_{m23} \cdot \vec{y}_2$ . Un frottement visqueux dans la liaison 3/2 est de coefficient  $f_{23}$ .
- o L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_1$ .
- o L'action exercée sur le poignet lors des différentes manipulations, sera modélisée comme l'action d'une charge sur le robot au point D. on donne :

$$\{T(Charge \rightarrow 34)\} = \begin{Bmatrix} \overline{R}(Charge \rightarrow 34) \\ \vec{M}(D, Charge \rightarrow 34) \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} F_{Ch} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

**Figure 13 : Graphe d'analyse**

Les équations différentielles de mouvement, de l'ensemble 34 et de la base 2, liant  $C_{m23}(t)$  et  $C_{m12}(t)$  aux paramètres de mouvement  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  peuvent s'écrire sous la forme :



**Eq1**  $\circ C_{m23} + A_1 \cdot \dot{\beta} + B_1 \cdot \cos\beta = B_{34} \cdot \ddot{\beta} + (C_{34} \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta + M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin\beta) \cdot \dot{\alpha}^2$

**Eq2**  $\circ C_{m12} = A_2 \cdot \ddot{\alpha} + B_2 \cdot \dot{\alpha} + C_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha}$

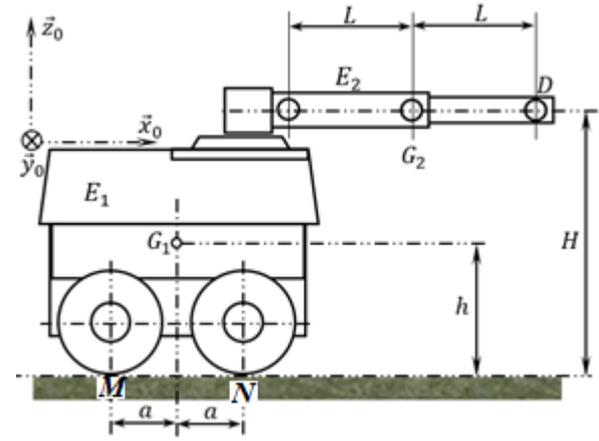
**Q29.** Expliquer d'une manière détaillée quel(s) théorème(s) et quel(s) isolement(s) permettant d'obtenir :

- a. L'équation Eq1. En déduire les expressions de  $A_1$  et  $B_1$  en fonction  $M_{34}, g, L_{34}, L, F_{Ch}$  et  $f_{23}$ .
- b. L'équation Eq2. En déduire les expressions de  $A_2, B_2$  et  $C_2$  en fonction  $C_{34}, J, \beta$  et  $f_{12}$ .

**D. Etude de la stabilité du robot :**

**Objectif :** Déterminer une relation entre la longueur de déploiement maximal et une charge extérieure maximale donnée permettant d'éviter un non décollement de la roue arrière.

Le robot, considéré comme l'ensemble  $\{E_1, E_2\}$ , est dans la configuration de la **figure 14** :



**Figure 14 :** manipulateur  $\gamma = 0$  et  $\beta = 0$

- $\circ$  Le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , supposé galiléen, est associé au sol 0.
- $\circ$  Le problème sera traité en statique plane dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$ .

Les efforts pris en compte sont :

- $\circ$  Les actions de la pesanteur sur chaque élément :

Élément	Centre d'inertie	Masse	Torseur de l'action de la pesanteur
Robot $E_1$	$G_1$ $\overrightarrow{NG_1} = -a \cdot \vec{x}_0 + h \cdot \vec{z}_0$	$M_1$	$\{T(pes \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{matrix} -M_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1}$
Manipulateur $E_2$	$G_2$ $\overrightarrow{NG_2} = (b + L) \cdot \vec{x}_0 + H \cdot \vec{z}_0$	$M_2$	$\{T(pes \rightarrow E_2)\} = \left\{ \begin{matrix} -M_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2}$

- Les actions de contact du sol sur les roues du robot :  
Ces actions seront modélisées par des glisseurs passant l'un par M et l'autre par N. Les résultantes de ces glisseurs seront notées respectivement :

$\vec{R}_M = Z_M \cdot \vec{z}_0 + X_M \cdot \vec{x}_0$  et  $\vec{R}_N = Z_N \cdot \vec{z}_0 + X_N \cdot \vec{x}_0$ . Les torseurs de ces actions de contact sont :

$$\{T(sol \xrightarrow{M} E_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_M \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \quad \text{et} \quad \{T(sol \xrightarrow{N} E_1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_N \\ \vec{0} \end{array} \right\}_N$$

- L'action extérieure supposée maximale exercée sur le manipulateur :

Cette action est modélisée par un glisseur au point D.  
 $\{T(Charge \rightarrow E_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} = -F_{\max} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$ . On donne  $\overline{ND} = (b + 2 \cdot L) \cdot \vec{x}_0 + H \cdot \vec{z}_0$ .

**Q30.** Déterminer le moment des actions mécaniques extérieures au robot au point N noté :  $\vec{y}_0 \cdot \overline{M}(N, \overline{robot} \rightarrow robot)$ .

**Q31.** En exprimant la condition de non décollement au point M ( $Z_M > 0$ ), déterminer  $L_{\max}$  qui correspond à la longueur de déploiement maximale du manipulateur.

### E. Dimensionnement des moteurs du robot :

**Objectif :** déterminer l'expression du couple transmis par les moteurs équipant le robot lors d'une translation suivant une ligne droite.

Hypothèses et données :

- Le repère  $R_S(O_0, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ , supposé galiléen, est associé au sol 0.
- Le robot se déplace en ligne droite en montée sur un sol incliné d'un angle  $\psi$  constant.
- Le problème est supposé plan ( $\vec{z}_0, \vec{x}_0$ ).
- Le contact des roues avant et arrière avec le sol est supposé ponctuel.
- Il y a roulement sans glissement au contact des roues avec le sol.

Modélisation du contact roue sol (voir **figures 15 et 16**) :

- Les 2 moteurs délivrent la même puissance.
- Seul le rendement (noté  $\eta$ ) du réducteur sera pris en compte.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception du contact roue - sol.
- La résistance au roulement des roues n'est pas négligée. Le coefficient de résistance au roulement  $\mu$  est identique pour tous les contacts roue - sol.
- Le torseur des actions mécaniques du sol sur la roue  $R_{AR}$  est :

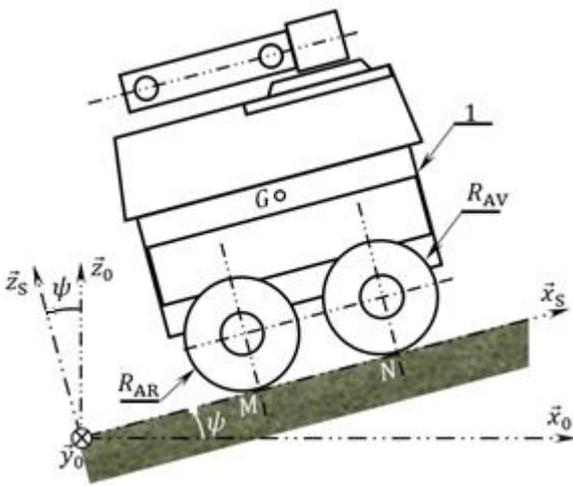
$$\{T(0 \rightarrow R_{AR})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_M \cdot \vec{x}_S + Z_M \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I ; \overline{MI} = \mu \cdot \vec{x}_S \quad \text{avec} \quad \mu > 0.$$

- Le torseur des actions mécaniques du sol sur la roue  $R_{AV}$  est :

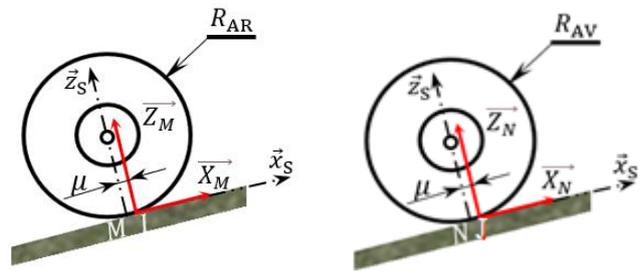
$$\{T(0 \rightarrow R_{AV})\} = \left\{ \begin{array}{c} X_N \cdot \vec{x}_S + Z_N \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J ; \overline{NJ} = \mu \cdot \vec{x}_S \quad \text{avec} \quad \mu > 0.$$

Notations :

- La masse du robot :  $M$ .
- Le moment d'inertie d'un moteur par rapport à son axe de rotation :  $J_m$ .
- Le moment d'inertie équivalent de l'ensemble {réducteur + roue} ramené sur l'axe de la roue :  $J_r$ .
- La vitesse angulaire du moteur  $\omega_m$ .
- La vitesse angulaire d'une roue  $\omega_r$ .
- Le couple fourni par un moteur :  $C_m$ .
- La vitesse du robot par rapport au sol :  $V. \vec{V}(G, 1/0) = V. \vec{x}_S$ .
- L'accélération du robot par rapport au sol :  $a_C$ .
- Le rapport de réduction du réducteur :  $k < 1$ .
- Le rayon d'une roue :  $R$ .
- L'accélération de la pesanteur :  $\vec{g} = -g. \vec{z}_0$ .



**Figure 15 :** Robot en mouvement sur un sol incliné



**Figure 16 :** Modélisation du contact roue/sol

Pour déterminer les couples moteurs, on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $Robot = \{Ch\hat{a}ssis, 2 \text{ moteurs}, 2 \text{ réducteurs}, 2 \text{ roues}\}$ .

**Q32.** Donner l'expression de  $V$  en fonction de  $R$ ,  $k$  et  $\omega_m$ .

**Q33.** Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du robot dans son mouvement par rapport au sol,  $T(Robot/0)$ . En déduire l'expression du moment d'inertie équivalent  $J_{eq}$  ramené sur l'arbre moteur en fonction de  $J_m, J_r, M, R$  et  $k$  tel que :

$$T(Robot/0) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot J_{eq}) \cdot \omega_m^2$$

**Q33.** Déterminer l'expression de la puissance intérieure en fonction de  $C_m, \omega_m$  et le rendement  $\eta$ .

**Q34.** Déterminer la puissance des actions mécaniques du sol sur la roue  $R_{AV}$ ,  $P(0 \rightarrow R_{AV}/0)$ . En déduire  $P(0 \rightarrow R_{AR}/0)$ .

**Q35.** Donner la puissance de l'actions mécanique de la pesanteur sur le robot,  $P(pes \rightarrow Robot/0)$ .

**Q36.** Montrer que l'équation obtenue par application du théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$J_{eq} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = A \cdot C_m + B \cdot M \cdot g + C \cdot (Z_M + Z_N)$$

En déduire les expressions de  $A, B$  et  $C$  en fonction de  $R, k, \eta, \mu$  et  $\psi$ .

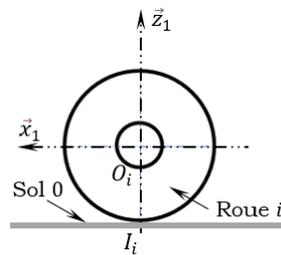
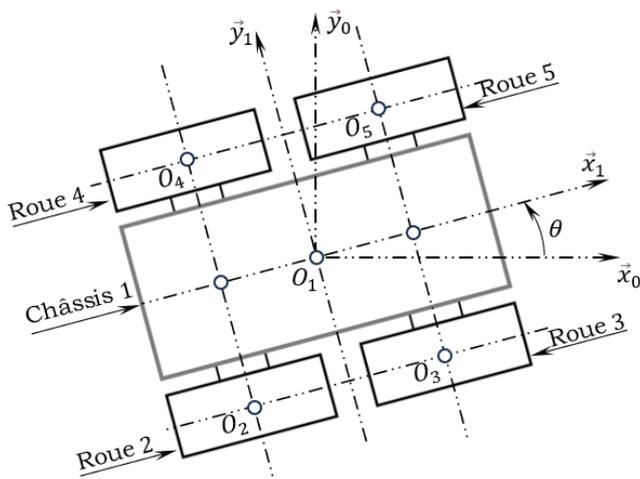
**Q37.** Par application du théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{z}_S$ , déterminer l'expression de  $Z_M + Z_N$  en fonction de  $M$ ,  $g$  et  $\psi$ .

**Q38.** En déduire l'équation différentielle du mouvement permettant de déterminer le couple moteur  $C_m$ .

**F. Comportement en virage :**

**Objectif :** analyser les glissements latéraux occasionnés au niveau des roues dans les phases de rotation du châssis.

Le robot CAMP est équipé de quatre roues non directionnelles. Par conséquent, il n'y a pas de mécanisme de direction des roues et la rotation du châssis est obtenue par le mouvement différentiel des roues. Cette solution technique, même sans glissement longitudinal au contact roue-sol, engendre un glissement latéral des roues pendant une phase de virage ; c'est une condition nécessaire à la rotation.



On note :  
 $v_{gi} = \vec{V}(I_i, i/0) \cdot \vec{y}$   
 La vitesse de glissement latéral de la roue  $i$  au point  $I_i$ .

On donne :  
 $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  Référentiel fixe.  
 $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  Référentiel lié au robot.  
 $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  Référentiel lié à la roue  $i$ .  
 $2 \leq i \leq 5$

$$\vec{\Omega}(i/1) = \omega_i \cdot \vec{y}_1$$

**Figure 17 :** Repérage et paramétrage du robot.

On définit le torseur cinématique du châssis par rapport au sol pendant une phase de virage :

$$\{V(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \cdot \vec{z}_1 \\ v_x \cdot \vec{x}_1 + v_y \cdot \vec{y}_1 \end{array} \right\}_{O_1}$$

Pour chaque roue notée  $i$  on définit :

- o le point de contact  $I_i$  entre la roue et le sol ;
- o le point  $O_i$  qui est la projection du point  $I_i$  sur l'axe de rotation de la roue par rapport au châssis.

Données géométriques :

$\vec{O_1 I_i} = -R \cdot \vec{z}_1$	o Le rayon d'une roue : $R$ .	
$\vec{O_1 O_i} = e_i \cdot \vec{x}_1 + a_i \cdot \vec{y}_1$ ;	$e_i = \pm e$ ;	$a_i = \pm a$

**Q39.** Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(I_i, 1/0)$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  et des données géométriques  $e_i$  et  $a_i$ .

**Q40.** Exprimer d'autre part ce même vecteur vitesse  $\vec{V}(I_i, 1/0)$  en fonction de la vitesse de glissement latérale  $v_{gi}$ , de la vitesse de rotation  $\omega_i$  de la roue  $i$  et des données géométriques.

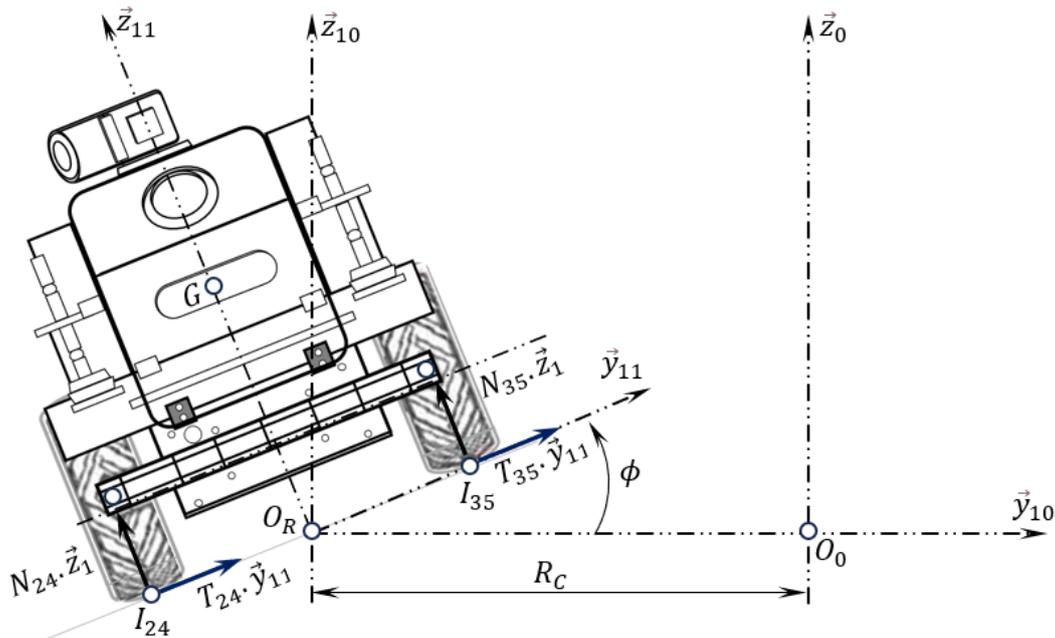
**Q41.** En déduire la vitesse de glissement latérale  $v_{gi}$  et de la vitesse de rotation  $\omega_i$  en fonction de  $\omega_1$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  et des données géométriques.

**G. Stabilité du robot sur sol incliné :**

**Objectif :** déterminer l'angle de devers (pente transversale) maximal correspondant à la condition de non renversement du robot.

Hypothèses et Paramétrage (voir **figure 18**) :

- On note  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le référentiel supposé galiléen lié au sol.
- Les repères  $R_{11}(O_R, \vec{x}_{11}, \vec{y}_{11}, \vec{z}_{11})$  et  $R_{10}(O_R, \vec{x}_{10}, \vec{y}_{10}, \vec{z}_{10})$  sont associés au châssis du robot. L'angle de devers  $\phi$  est supposé constant.
- Le mouvement du châssis (1) par rapport au repère  $R_0$ , est une rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  avec  $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_{10}) = (\vec{y}_0, \vec{y}_{10})$ .
- On suppose que la vitesse de rotation  $\dot{\theta} = \omega_1$  est constante.
- On note :  $\overline{I_{24}O_R} = \overline{O_R I_{35}} = L \cdot \vec{y}_{11}$
- L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_0$ .



**Figure 18 :** Configuration du robot dans le plan de l'étude

- Dans le plan d'étude, les actions mécaniques en  $I_{24}$  et  $I_{35}$  du sol sur le robot (noté  $Rb$ ) seront modélisées par des liaisons ponctuelles avec frottement. Ces actions sont définies par les torseurs suivants :

$$\{T_1(0 \rightarrow Rb)\} = \left\{ \begin{matrix} T_1 \cdot \vec{y}_{11} + N_1 \cdot \vec{z}_{11} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_{24}} ; \quad \{T_2(0 \rightarrow Rb)\} = \left\{ \begin{matrix} T_2 \cdot \vec{y}_{11} + N_2 \cdot \vec{z}_{11} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_{35}}$$

- Il n'y a pas de glissement entre les roues et le sol au niveau des points  $I_{24}$  et  $I_{35}$ .
- La matrice d'inertie du robot au point  $G$  sera notée :

$$I(G, Rb) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_{11}, \vec{y}_{11}, \vec{z}_{11})}. \text{ La masse du robot est } M. \text{ Le centre d'inertie } G \text{ du}$$

robot est défini par :  $\overrightarrow{O_R G} = H \cdot \vec{z}_{11}$ ,  $\overrightarrow{O_0 O_R} = -R_C \cdot \vec{y}_{10}$ .

Soit  $\phi_{max}$ , la valeur maximale de l'angle de dévers, au-delà de laquelle on risque le renversement du robot.

**Q42.** Par une étude dynamique, déterminer une équation différentielle permettant de déterminer  $\phi_{max}$ . Pour cette étude, il faut préciser :

- Le système isolé.
- Le théorème appliqué.
- Le bilan des actions mécaniques extérieures.
- Toutes les étapes de détermination des quantités dynamiques.
- ...

**Fin de l'énoncé**

Ne rien écrire dans ce cadre

**Document réponse DR1**

**Q1.** Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au solide 0 :

$$\{V(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A, 1/0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \text{_____} \\ \text{_____} \end{array} \right\}_A$$

**Q2.** Exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{AB}$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\overrightarrow{AB} = \text{_____} \cdot \vec{x}_1 + \text{_____} \cdot \vec{y}_1$$

**Q3.** Déterminer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/1)$ .

$$\vec{\Omega}(2/1) = \text{_____}$$

**Q4.** Donner le vecteur vitesse  $\vec{V}(A, 2/1)$ .

$$\vec{V}(A, 2/1) = \text{_____}$$

**Q5.** En déduire le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/1)$ .

$$\vec{V}(B, 2/1) = \text{_____} \cdot \vec{x}_1 + \text{_____} \cdot \vec{y}_1$$

**Q6.** Exprimer le vecteur position  $\overrightarrow{OB}$  dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

$$\overrightarrow{OB} = \text{_____} \cdot \vec{x}_0 + \text{_____} \cdot \vec{y}_0$$

**Q7.** Déterminer le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(2/0)$ .

$$\vec{\Omega}(2/0) = \text{_____}$$

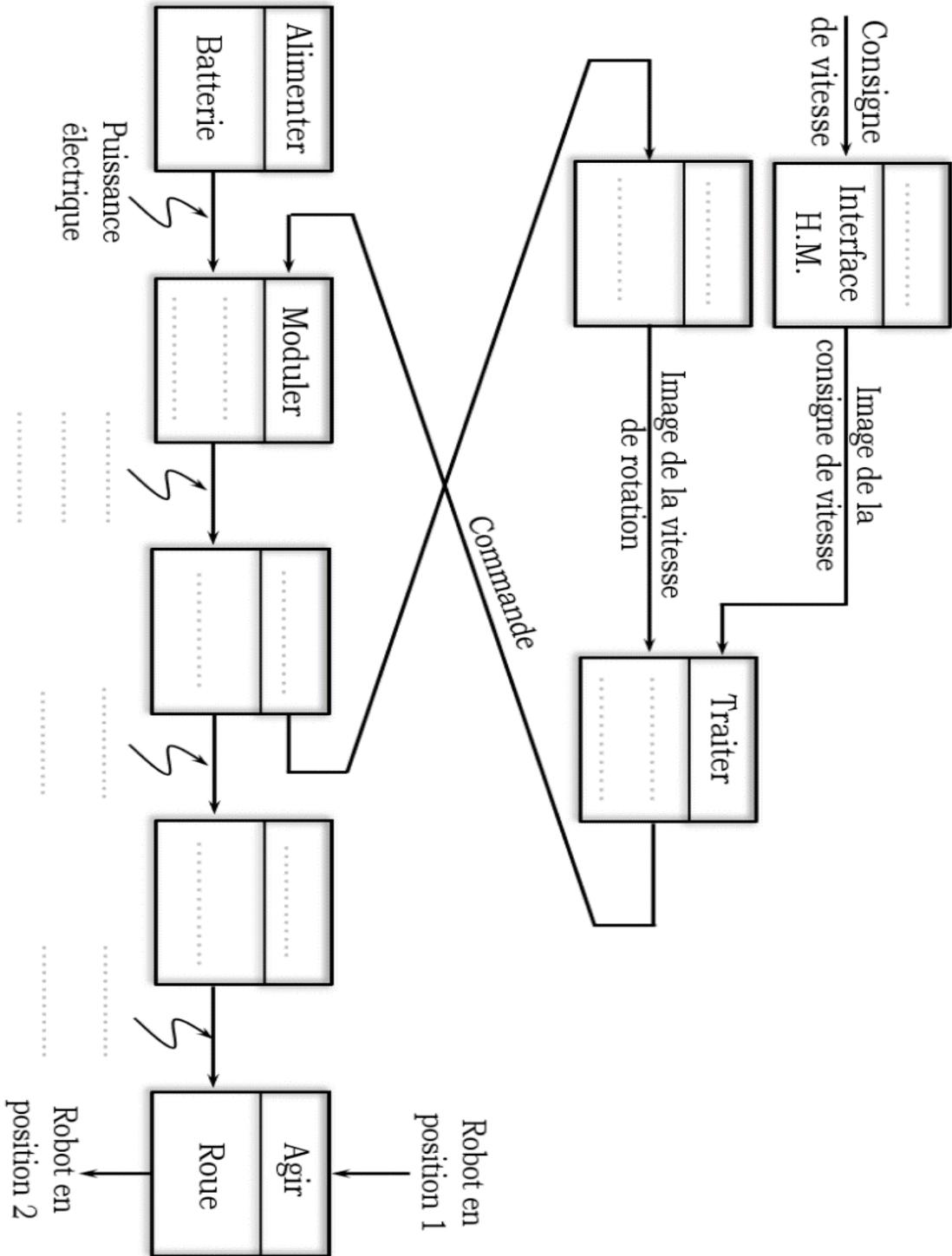
**Q8.** Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(B, 2/0)$ .

$$\vec{V}(B, 2/0) = \text{_____} \cdot \vec{x}_0 + \text{_____} \cdot \vec{y}_0$$

Ne rien écrire dans ce cadre

**Document réponse DR2**

**Q9.**



Ne rien écrire dans ce cadre

**Document réponse DR3**

**Q14, Q15 et Q18.**

