★★

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2016
- الموضوع -
NS 25

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l’épreuve est de 4 heures.
- L’épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques …(3.5 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique…………......(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes ….(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l’analyse…………….......(7 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l’analyse……………….(3 pts)

L’usage de la calculatrice n’est pas autorisé

L’usage de la couleur rouge n’est pas autorisé

EXERCICE 1: (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et $E=\{M(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.5 1- Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2-Vérifier que :

0.5 $$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ (\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2)\ :\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

3- On pose : $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.75 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$.

0.5 4- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5- On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0.5 a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

0.5 b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

EXERCICE 2: (3points)

Première partie : Soit (a,b) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise a^3+b^3

0.25 1- Montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times 57$)

0.25 2- Montrer que : 173 **divise** a si et seulement si 173 **divise** b

0.25 3- **On suppose que** 173 **divise** a .Montrer que 173 divise $a+b$

4- **On suppose que** 173 **ne divise pas** a .

0.5 a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0.5 b) Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0.5 c) En déduire que 173 divise $a+b$

Deuxième partie : On considère dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation suivante :

$$(E)\quad x^3+y^3=173(xy+1)$$

Soit (x, y) un élément de $\square^* \times \square^*$ solution de (E), on pose : $x + y = 173k$ avec $k \in \square^*$

0.25 1- Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

0.5 2- Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE 3: (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$

0.5 1- a) Montrer que : $\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0.5 b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0.5 2- Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3- On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$

0.5 a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0.5 b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4- Soit θ un réel **donné** de l'intervalle $]0, \pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$

0.5 a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z = 2\dfrac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$

0.5 b) Donner en fonction de q ,la forme trigonométrique du nombre complexe z .

EXERCICE 4 : (7points)

Première partie :

0.5 1- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1 - e^{-x}}$

2- En déduire que :

0.25 a) $(" x > 0)$; $1 - x < e^{-x}$

0.25 b) $(" x > 0)$; $x + 1 < e^{x}$

0.25 c) $(" x > 0)$; $0 < \ln\left(\dfrac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$

<u>Deuxième partie</u> :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{xe^x}{e^x-1} \quad \text{si } x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=1$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1- a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0 .

0.5 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2-a) Montrer que : $(\forall x \geq 0) \quad x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

0.5 b) En déduire que : $(\forall x \geq 0) \quad \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \leq e^{-x}+x-1 \leq \frac{x^2}{2}$

0.5 3-a) Vérifier que : $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x)-1}{x}=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$

0.75 b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0.75 4-a) Montrer que f est dérivable en tout point de $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \quad f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

0.5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

<u>Troisième partie</u> :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0>0$ et $u_{n+1}=\ln\left(f(u_n)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$

0.5 a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n>0$

0.5 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0.5 c) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(x)\right)=x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

<u>EXERCICE 5</u> :(3 points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt$$

0.5 1-a) Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0.5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I .

0.25 c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

2-a) En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u=\sqrt{e^t-1}$, montrer que pour

0.5 tout x de I on a : $\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$

0.25 3-a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F .

FIN